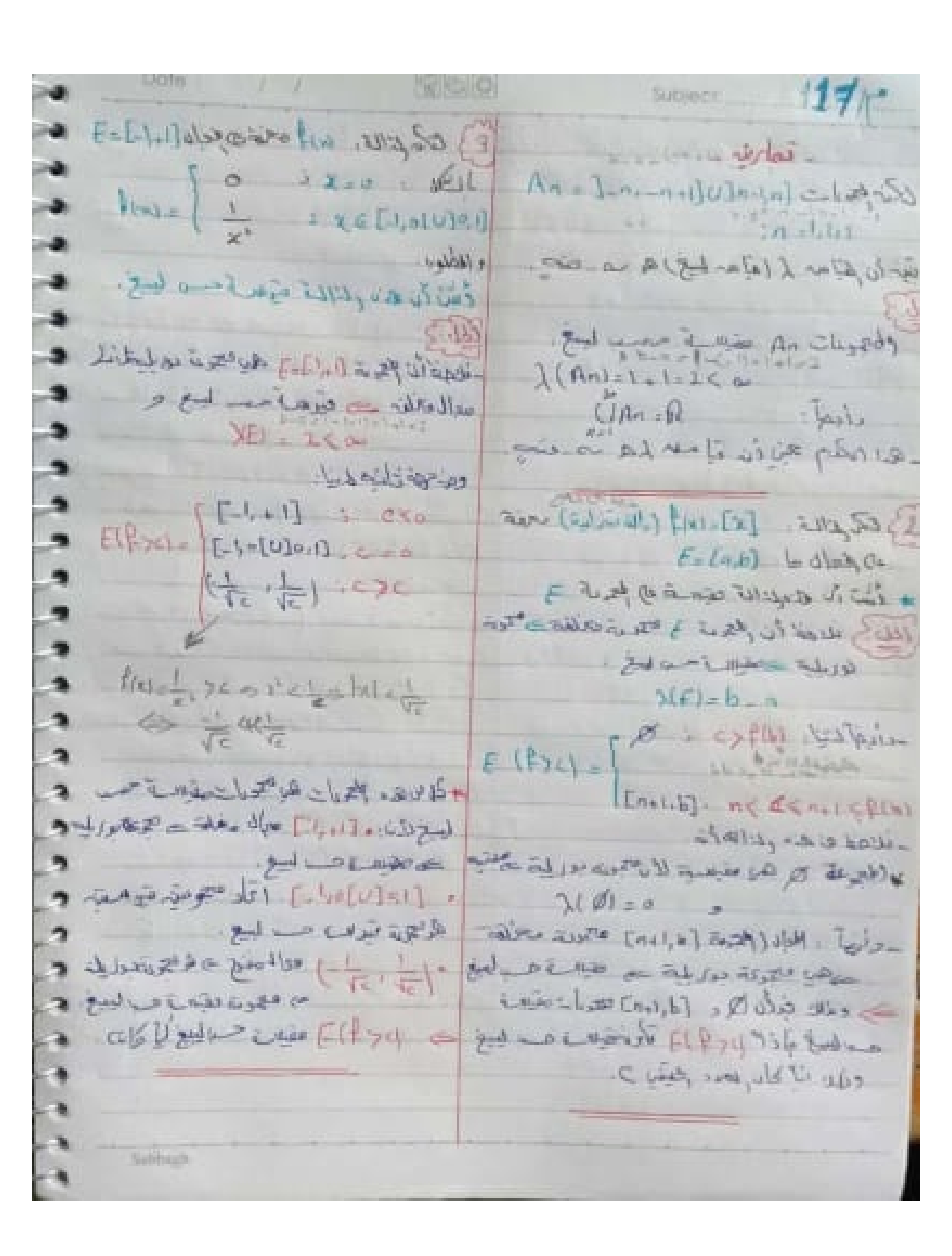


تمارين

لتكن المجموعات $A_n =]-n, -n+1[\cup]n-1, n]$ ؛ $n = 1, 2, \ldots$

بين أن قياس λ (قياس لوبيغ) A لا منتهي.

(1) المجموعات A_n مقيسة حسب لوبيغ

$\lambda(A_n) = 1 + 1 = 2 < \infty$

ولدينا: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$

هذا الحكم يعني أن قياسه λ هو لا منتهي.

(2) لتكن الدالة $f(x) = [x]$ (الجزء الصحيح) معرفة على مجال ما $E = [a, b]$

* أثبت أن هذه الدالة مقيسة على المجموعة E

(الحل) نلاحظ أن المجموعة E مجموعة مغلقة محدودة ⇐ قابلة للقياس حسب لوبيغ

$\lambda(E) = b - a$

ومن جهة أخرى:

$$E(f>c) = \begin{cases} \emptyset & ; c > f(b) \\ [n+1, b] & ; n \le c < n+1, c \le f(b) \end{cases}$$

نلاحظ في هذه الحالات:

* المجموعة $\emptyset$ هي مقيسة لأن مجموعة بورلية منتهية و $\lambda(\emptyset) = 0$

ثانياً: المجال (المجموعة) $[n+1, b]$ مجموعة مغلقة هي مجموعة بورلية من مقيسة حسب لوبيغ

⇐ وبالتالي فإن $\emptyset$ و $[n+1, b]$ مقيسة حسب لوبيغ $E(f>c)$ مقيسة حسب لوبيغ وهذا مهما كان العدد الحقيقي c

---

(3) لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $E = [-1, +1]$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & ; x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \end{cases}$$

والمطلوب:

أثبت أن هذه الدالة مقيسة حسب لوبيغ.

(الحل) نلاحظ أن المجموعة $E = [-1, 1]$ هي مجموعة بورلية لأنها مجال مغلق ⇐ قيوسة حسب لوبيغ و

$\lambda(E) = 2 < \infty$

ومن جهة ثانية لدينا:

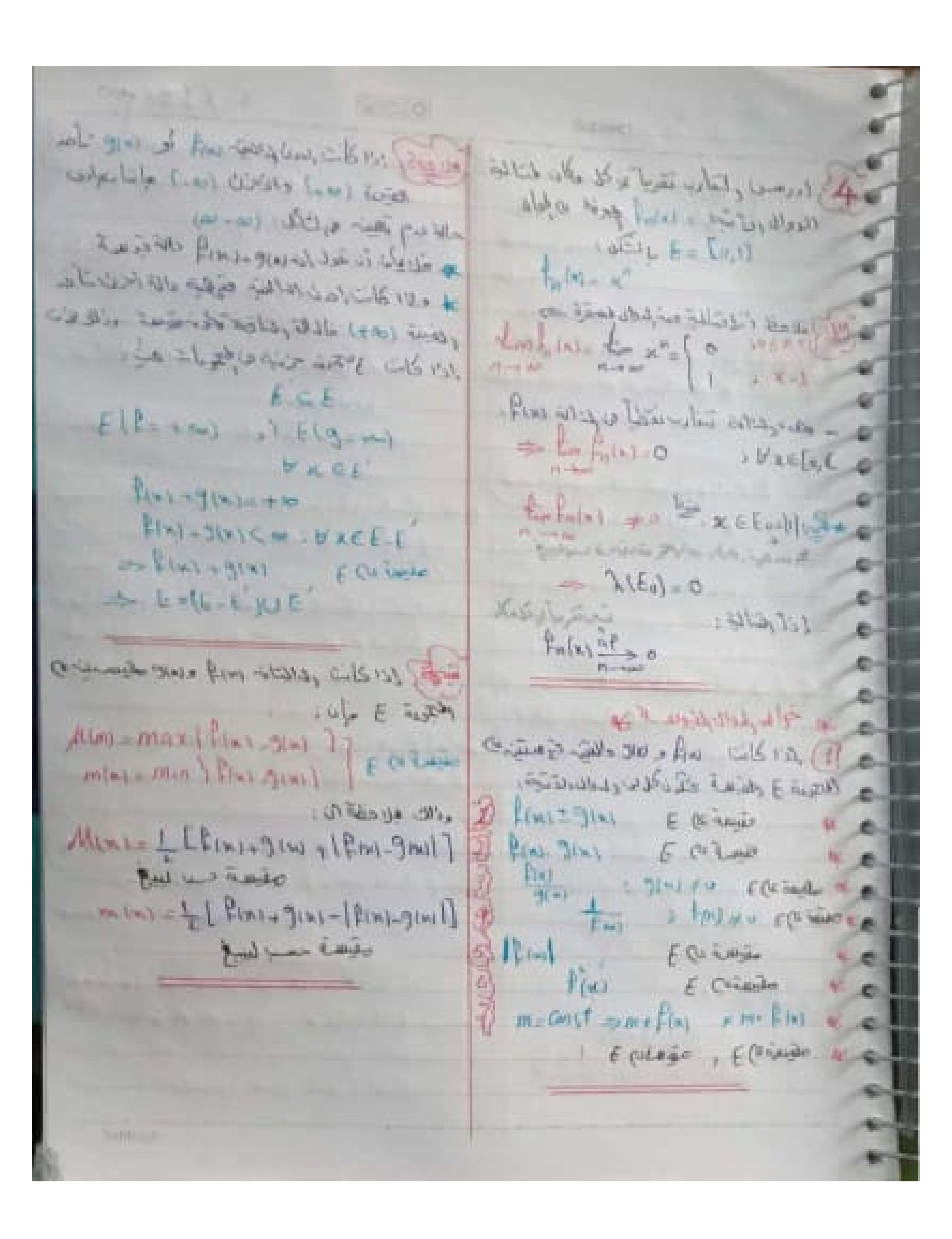
$$E(f>c) = \begin{cases} [-1, +1] & ; c < 0 \\ [-1, 0[\cup]0, 1] & ; c = 0 \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right) & ; c > 0 \end{cases}$$

$f(x) = \frac{1}{x^2} > c \Rightarrow x^2 < \frac{1}{c} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{c}}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{c}} < x < \frac{1}{\sqrt{c}}$

* كل هذه المجموعات هي مجموعات مقيسة حسب لوبيغ لأن: $[-1, +1]$ مجال مغلق ⇐ مجموعة بورلية ⇐ مقيسة حسب لوبيغ.
* $[-1, 0[\cup]0, 1]$ اتحاد مجموعتين قابلتين للقياس ⇐ المجموعة قابلة للقياس حسب لوبيغ
* $\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ مجال مفتوح ⇐ مجموعة بورلية ⇐ مجموعة مقيسة حسب لوبيغ

⇐ $E(f>c)$ مقيسة حسب لوبيغ لكل c.



$f_n(x)=x^n$

$\lambda(E_0)=0$

$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$

$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$